Θεώρημα Οι καμπύλες του Fermat 04-04-201?

$V(x^n+y^n-1) \subset \mathbb{C}^2$ για $n \geq 3$ δεν είναι ρητές

Απόδειξη

Έστω ότι η $V(x^n+y^n-1)$ είναι ρητή για κάποιο $n \geq 3$.
$V(x^n+y^n-1)$ ρητή άρα υπάρχουν $p(t), q(t), r(t) \in \mathbb{C}[t]$ τέτοια ώστε αν $x(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ και $y(t) = \dfrac{r(t)}{q(t)}$ τότε $x(t)^n + y(t)^n = 1$ $\to p^n(t) + r^n(t) = q^n(t)$. Ο βαθμός τουλάχιστον ενός από τα p, q, r είναι μεγαλύτερος ή ίσος με 1.
Έστω r είναι το πολυώνυμο που έχει το μεγαλύτερο βαθμό (δηλ. $\deg r \geq \deg p$, $\deg r \geq \deg q$).
Τα p, q, r δεν έχουν κανένα κοινό ανάγωγο παράγοντα.
Τα ζεύγη $\{p, q\}$, $\{p, r\}$ και $\{q, r\}$ δεν έχουν κανένα ανάγωγο κοινό παράγοντα.
(Έστω $h(t)$ ανάγωγος κοινός παράγοντας των p, q τότε
$h(t) \mid p(t)$, $h(t) \mid q(t) \Rightarrow h(t) \mid p^n(t) - q^n(t) = -r^n(t)$
$\Rightarrow h(t) \mid r(t)$ Άτοπο.

$\boxed{\text{Ανά 2 δεν έχουν κανένα κοινό ανάγωγο παράγοντα.}}$

ΣΧΟΛΙΟ

Έχουμε την σχέση $p^n + r^n = q^n$ (∗) την παραγωγίζω και έχουμε
$$(p^n + r^n)' = (q^n)' \Rightarrow np^{n-1}p' + nr^{n-1}r' = nq^{n-1}q' \quad (∗∗)$$

$$p'p^n + p'r^n = p'q^n \quad (\text{πολ/ζω με } p' \text{ την } (∗))$$
$$pp^{n-1}p' + pr^{n-1}r' = q^{n-1}q'p \quad (\text{πολ/ζω με } p \text{ την } (∗∗))$$

$$p'r^n - pr^{n-1}r' = p'q^n - pq^{n-1}q'$$

$$r^{n-1}(p'r - pr') = q^{n-1}(p'q - pq')$$

Όμως ισχύει,

$\deg r \geq \deg q$ r, q δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα
$\deg r \geq \deg q$

Συνεπώς,

$\dot{p}r - p\dot{r} \neq 0$ (Έστω ότι $\dot{p}r - p\dot{r} = 0$)

$$\left(\frac{p}{r}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{p}{r} = c \Rightarrow p(t) = c\,r(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow r \mid p$, άρα κάθε ανάγωγος παράγοντας του r είναι και ανάγωγος παράγοντας του p. Άτοπο

Προσοχή $\boxed{\text{Βρισκόμαστε σε περιοχή μοναδικότητας ανάλυσης}}$

Έχουμε την σχέση $r^{n-1}(\dot{p}r - p\dot{r}) = q^{n-1}(\dot{p}q - p\dot{q})$
Αναλύουμε όλα τα πολυώνυμα σε γινόμενο αναγώγων
(r, q δεν έχουν κοινό ανάγωγο παράγοντα)
Οι ανάγωγοι παράγοντες του r^{n-1} δεν εμφανίζονται στην ανάλυση του q^{n-1}, άρα όλοι εμφανίζονται στην ανάλυση του $\dot{p}q - \dot{q}p \Rightarrow \dot{p}q - \dot{q}p = r^{n-1}g$

τώρα θα κοιτάζουμε τους βαθμούς ώστε να οδηγηθούμε σε άτοπο.

$$\deg p + \deg q - 1 \geq \deg(\dot{p}q - \dot{q}p) = \deg(r^{n-1}g) =$$
$$= \deg r^{n-1} + \deg g$$

$$\rightsquigarrow \deg p + \deg q - 1 \geq \deg(r^{n-1}) \geq (n-1)\deg r \geq 2\deg r$$

$$\rightsquigarrow \deg p + \deg q - 1 \geq \deg p + \deg q - 1.$$ Άτοπο

Άρα, οι καμπύλες του Fermat για $n \geq 3$ δεν είναι ρητές.

$\square$

$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ορίζουμε $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$

Χωρίς να χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τους απειροστικούς

Σχόλιο

$g(x) = b_m(x-\sigma_1) \dots (x-\sigma_m)$

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ 2 πολυώνυμα.
Ώστε $f(x)$ γράφεται ως εξής $f(x) = a_n(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho$
Η ερώτηση είναι πότε μια ρίζα είναι διπλή.
Στον $\mathbb{R}^2$ χρησιμοποιούσαμε την Διακρίνουσα (ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑΣ)
Ερώτηση: Μπορώ να βρω χωρίς να λύσω να βρω κοινή ρίζα σε 2 τυχαία πολυώνυμα.

Εισαγωγικά

τι είναι περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης → στοιχεία, μονάδες και τα υπόλοιπα γράφονται ως γινόμενα αναγώγων

Έστω D περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης
$\Rightarrow D[x]$ περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης

Πρόταση: Έστω g ανάγωγο και μη σταθερό πολυώνυμο του $D[x]$, με $\underline{g \notin D}$, τότε το $g^2 | f$ αν και μόνο αν $g | f$ και $g | f'$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ $g^2 | f \Rightarrow f = g^2 \cdot h = g(gh) \Rightarrow \boxed{g | f}$

$f' = (g^2)' h + g^2 (h)' = 2gg'h + g^2 h' = g(2g'h + gh')$
$\Rightarrow \boxed{g | f'}$

$(\Leftarrow)$ Ισχύει $g | f$ και $g | f'$. Θέλω να δείξω ότι $g^2 | f$.
Εφόσον $g | f \Rightarrow f = g \cdot l$
Εφόσον $g | f' = g'l + gl'$, $g | gl'$ $\Rightarrow$ $g | g'l$, g είναι ανάγωγο $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g | g'$ δεν γίνεται αφού το g έχει βαθμό $\deg g$ και το g' έχει βαθμό $\deg g - 1$
ή
$g | l$

Συνεπώς, $g | l \Rightarrow l = hg$ και αφού $f = g \cdot l$ προκύπτει ότι
$f = ghg = \underline{g^2 h}$ □

$\boxed{\text{Κανένα πολυώνυμο δεν διαιρεί την παράγωγό του}}$! SOS

Πρόταση: Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ και $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in D[x]$ και επίσης $a_n \neq 0 \neq b_m$, όπου D είναι περιοχή μονοσήμαντης ανάλυσης. Τα πολυώνυμα f, g έχουν κοινό παράγοντα που δεν είναι σταθερός (δηλαδή δεν είναι στοιχείο του D) αν και μόνο αν $\exists$ μη-μηδενικά πολυώνυμα ψ, ϕ βαθμών αυστηρά μικρότερων των n και m αντίστοιχα τ.ω. $\phi f = \psi g$

Απόδειξη

($\Longrightarrow$) Τα πολυώνυμα f και g έχουν μη-σταθερό κοινό παράγοντα, έστω τον q. Τότε

$$f = q\psi \ (1) \quad \text{και} \quad g = q\phi \ (2)$$

$\deg f = \deg q + \deg \psi \qquad \deg g = \deg q + \deg \phi$

Γνωρίζω από υπόθεση ότι:

$$\deg f = n \quad \text{και} \quad \deg g = m$$

Όμως ισχύει $\deg q \geq 1$

Άρα,

$$\deg \psi < \deg f = n \quad \text{και} \quad \deg \phi < \deg g = m$$

$$\phi f \overset{(1)}{=} \phi q \psi \overset{(2)}{=} g\psi$$

($\Longleftarrow$) Υπάρχουν ϕ, ψ τέτοια ώστε $\deg \phi < \deg g = m$ και $\deg \psi < \deg f = n$ και επίσης ισχύει $\phi f = g\psi$. Θέλω να αποδείξω ότι f, g έχουν κοινό παράγοντα. Βρίσκομαι σε μονοσήμαντη ανάλυσης περιοχή. Επομένως, αναλύω ϕf, $g\psi$ σε γινόμενα αναγώγων. Οι ανάγωγοι παράγοντες του f εμφανίζονται όλοι σε γινόμενο $g\psi$. Το ψ όμως έχει βαθμό αυστηρά μικρότερο του βαθμού του f. Άρα, τουλάχιστον ένας ανάγωγος παράγοντας του f εμφανίζεται στον g. Άρα, f, g έχουν κοινό παράγοντα. $\square$

$\phi \neq 0 \neq \psi$

Θεώρημα (Bezout, ~1750)

Τα πολυώνυμα $f=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, $g=b_0+b_1x+\dots b_mx^m \in D[x]$ με $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$ και D ΠΜΑ έχουν κοινό παράγοντα που δεν είναι σταθερός (δηλαδή δεν είναι στοιχείο του D) αν και μόνο αν $\underbrace{Res}_{\text{Απαλοίφουσα}}(f,g;x)=0$

Ορισμός:

$$Res(f,g;x)=\begin{array}{c}\text{m φορές}\\ \\ \\ \text{n φορές}\end{array}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & a_0 & a_1 & & & a_n \\ b_0 & b_1 & & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & b_0 & & & & b_m & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & b_0 & & & & & b_m \end{vmatrix}$$

απαλοίφουσα
resultant

$(m+n)\times(m+n)$

> Αν η απαλοίφουσα είναι μηδέν τότε τα δύο πολυώνυμα έχουν κοινή ρίζα.

ΣΧΟΛΙΟ

Απόδειξη Θεωρήματος Bezout

Έστω f,g έχουν μη-σταθερό κοινό παράγοντα

$\Leftrightarrow$ $\exists\ \phi,\psi$ με $\deg\psi<n$ και $\deg\phi<m$ με $\phi,\psi\neq 0$ με $\phi f=\psi g$

$\Leftrightarrow$ $(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots+c_{m-1}x^{m-1})f=(d_0+d_1x+\dots+d_{n-1}x^{n-1})g$

μ' ένα τουλάχιστον $c_i\neq 0$

$c_0f+c_1xf+c_2x^2f+\dots+c_{m-1}x^{m-1}f-d_0g-d_1xg-\dots-d_{n-1}x^{n-1}g=0$

πολυώνυμα βαθμού το πολύ $m+n-1$.

Τα $f, xf, x^2f, \ldots x^{m-1}f, g, xg, \ldots x^{n-1}g$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

$1, x, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & & a_n & & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & & a_0 & & & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & & b_m & & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ & & & b_0 & & & & b_m \end{vmatrix} = 0$$

* ——— * ——— *

Έστω D ακέραια περιοχή $D \subset K$

↑ το σώμα των κλασμάτων της D

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$D \to K$

— * —

Έστω D ακέραια περιοχή D^* οποιοδήποτε στοιχείο του D εκτός από το 0

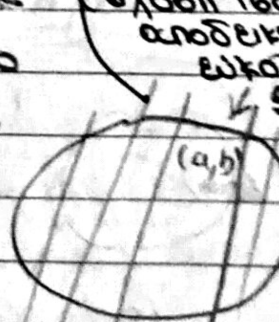
Θεωρώ $D \times D^* = \{(a,b) \mid a \in D, b \in D, b \neq 0\}$

Θεωρώ σχέση ισοδυναμίας $(\sim)$

$\sim \quad (a,b) \sim (c,d) \overset{\text{ορισ}}{\Longleftrightarrow} ad = bc$ (σχέση ισοδυναμίας αποδεικνύεται εύκολα)

η σχέση ισοδυναμίας μου χωρίζει το σύνολο σε κλάσεις ισοδυναμίας

$\frac{a}{b}$



Πρέπει να ορίσω την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, για να δείξω ότι είναι σώμα.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Έχει και αντίστροφο κάθε στοιχείο $\neq 0$

$\rightsquigarrow K = D \times D^*$

□

Έστω $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_n(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_n)$
Έχει το συγκεκριμένο πολυώνυμο κάποια πολλαπλή ρίζα;
Έστω $(x-\rho)^2 \mid f \overset{\text{θεώρημα}}{\Longleftrightarrow} (x-\rho) \mid f$ και $(x-\rho) \mid f'$

$\Longleftrightarrow \boxed{Res(f, f'; x)} = 0$

Στην απαλοίφουσα έχω 2 τυχαία πολυώνυμα
Εδώ είναι διακρίνουσα του f

SOSARA

Έστω $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{Q}[x]$, $a_2 \neq 0$
$f' = a_1 + 2a_2 x$

Διακρίνουσα του f:

$$Res(f, f'; x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}$$

3×3

την f' θα τη χρησιμοποιήσω 2 φορές, επειδή $\deg f = 2$

Υπολογίζω την $Res(f, f'; x)$ και προκύπτει:
$$Res(f, f'; x) = 4a_2^2 a_0 - a_1^2 a_2 = a_2(4a_2 a_0 - a_1^2)$$

Με ενδιαφέρει πότε η συγκεκριμένη ποσότητα είναι μηδέν. Εφόσον $a_2 \neq 0$ τότε $4a_2 a_0 - a_1^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ διπλή ρίζα (όπως γνωρίζω από το λύκειο).

Προσοχή

Διακρίνουσα του $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$ με $a_3 \neq 0$

$$Res(f, f'; x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix}$$

5×5

Τα Μέγαρα, αρχαία ελληνική πόλη είχαν βάλει στο νόμισμά τους το θεώρημα: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

ab	a^2
b^2	ab

Τώρα, το χρησιμοποιεί η τράπεζα Alpha ως σύμβολο της.

Παρατήρηση

Βρισκόμαστε πάνω από τους μιγαδικούς $\mathbb{C}[x]$

$Res(f,g;y)$ = πολυώνυμο στο x

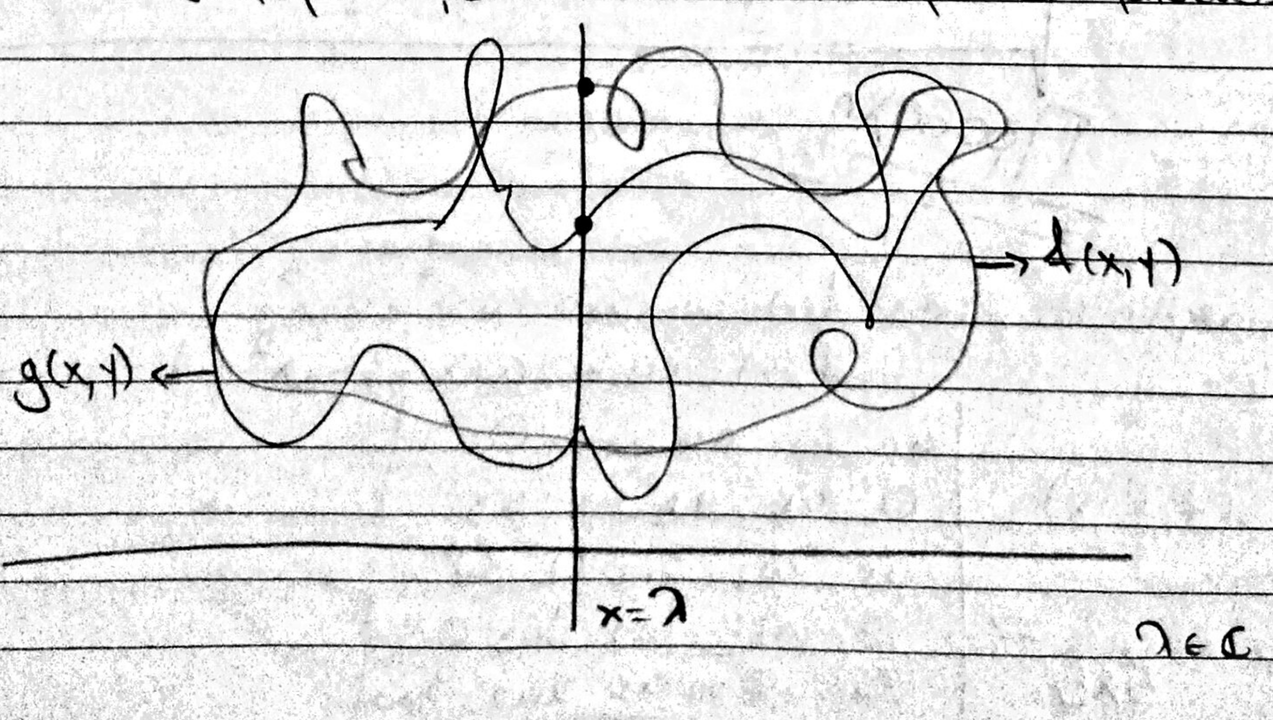
$= a(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$

$Res(f(x,y), g(x,y); y)$

$Res(f(\lambda,y), g(\lambda,y); y) = a(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)\cdots(\lambda-\rho_n)$

Αυτό γίνεται μηδέν αν $\lambda=\rho_i$ $i=1,n$ (μια από όλες)

Διαφορετικά, είναι πάντα διάφορο του μηδενός



$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ x=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow f(\lambda,y)=0 \qquad \left.\begin{array}{l} g(x,y)=0 \\ x=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow g(\lambda,y)$$

Πότε έχουν κοινό σημείο; Όταν η Res = 0 Δηλαδή πρέπει να έχουν κοινό σημείο για την $x=\lambda$.
Ο ρόλος της Res, βρίσκει τα κοινά σημεία και μας δίνει τις x-συντεταγμένες τους. Το ίδιο μπορώ να κάνω και για τις y-συντεταγμένες.
Η Res μου προβάλλει τα σημεία τομής ως προς x.